＜2024 年度サマースクール要旨＞

グラフ理論のエッセンス
〜四色定理はいかにして証明されたか？〜

日本大学文理学部　数学科　准教授　齋藤 渓

小学生のころ、47 都道府県それぞれの形をした四色のブロックを組み合わせてバラバラになった日本地図を再現するという知育教材がありました。当時の私は「隣り合う都道府県は必ず異なる色」というルールに気付いていたのですが、一般論としてそれが何色で足りるのか？という問いを立てるには至りませんでした。この問いこそが 18 世紀にロンドンの数学者たちより提起された「四色問題」になります。

さて、都道府県を"頂点"として、隣り合った頂点は"辺"で結ぶことにしましょう。このような構造をグラフ（離散グラフ）といい、グラフのもつ幾何的な情報などを研究する分野をグラフ理論といいます。例えば、平面グラフ、すなわち、都道府県地図のグラフのようにどの辺も互いに交差することがなく描かれたグラフにおいては、繋がっている辺の本数が 5 本以下の頂点が少なくとも 1 つは必ず存在するという定理が知られています（お疑いあらば、是非お試しを）。

グラフ理論の観点から四色問題を捉え直すと「辺で結ばれた頂点は異なる色となるよう頂点を色塗りするとき、どんな平面グラフであっても"四色"あれば事足りるのではないか？」と翻訳されます。この問題は提起されてより一世紀以上未解決のままだったのですが、1976 年にアメリカの数学者アッペルとハーケンにより肯定的に解決されました。すなわち、現代では既に四色問題は「四色定理」へと昇華されております。

「かくも単純な命題を証明できなかったとは論理学と数学の名折れである！」とはアメリカの数学者サンダーズの言ですが、得てして数学の定理とは単純であるほど証明が困難であったりするものです。四色定理の証明に至るまでも、これに挑戦し続けた数多の歴史と物語が、論文や講演として残されております。例えば、四色問題が 1878 年にロンドン数学会で提起されてから 1 年後、ロンドンの数学者ケンプが四色問題を解決したと同学会にて公表したのですが、残念ながらその証明には誤りがありました。しかし、その卓絶したアイデアを受けてイギリスの研究者ヒーウッドが「五色定理」の証明に成功しております。

その証明は、グラフの中から繋がっている辺の本数が 5 本以下である頂点を 1 つずつ消去していき、十分な数を消去してグラフを 5 色で塗ることができたら、消去していった頂点に色を塗りながら復元していく……というものです。復元する際、隣り合う頂点と異なる色を必ず塗ることができる！と保証するのがケンプ鎖(Kempe chain)のアイデアです。これは、復元する頂点の周りに五色すべての頂点が存在している場合、適当な二色を選び、それらの色の頂点を交互に結ぶ鎖を作り、鎖上のすべての頂点の色を他方の色へと一斉にスイッチさせるというアイデアです。この操作によって、周りの色数減らすことができるため、色塗りのルールを保ったまま復元が可能であることが保証されます。

このように、グラフ理論における定理は、ある種の直観的な見識を、論理体系が確立された記号による数学言語へと翻訳することにより証明が成されることがあります。それは時に、計算とはかけ離れた世界で組み立てられる、原始的な論理のみにフォーカスした数学のエッセンスといえるものなのかもしれません。計算とはすなわち数字と記号の織り成すパズルであり、数学の一側面を抽出したものと捉えられるでしょう。馴染みが薄ければ、計算こそが数学のすべてであるかのような誤解を招くことも多いので、もしかしたら、グラフ理論の一端に触れて新鮮さを感じた方は少なくなかったかもしれません。

さて、四色定理に話を戻しましょう。紙面の都合により専門用語の解説は省きますが、アッペルとハーケンはグラフの構造を極大平面グラフに限定し、可約配置からのみなる不可避集合を求めることによって四色定理の証明に成功しました。それは 700 ページ以上の緻密な証明と、何よりもコンピューターを 1000 時間以上稼働させることにより成し遂げられた結果です。彼らの偉大なる業績を称えども、根幹をコンピューターの"計算"に任せた証明は「何故、証明できたのか？」を説明するには不十分と考える人も少なくありません。まだ見ぬ四色定理のエッセンスを求めて、数学者たちの挑戦は続いています。